

Matematika – přehled vzorců

1. Výrazy: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Vytýkání: $ax + bx - cx = x \cdot (a + b - c)$
 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
 $A^2 - B^2 = (A+B) \cdot (A-B)$
 $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
 $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
 $A^3 + B^3 = (A+B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$
 $A^3 - B^3 = (A-B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$

2. Mocniny: $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$ Záporný exponent:
 $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
 $a^r : a^s = a^{r-s} \rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $a^{-n} = \left(\frac{1}{a^n}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$
 $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^{-n}} = a^n$
 $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
 $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ $a^0 = 1$

3. Odmocniny: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
 $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
 $(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

4. Kvadratická rovnice: $ax^2 + bx + c = 0$ $D = b^2 - 4ac$
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $a \neq 0$

5. Komplexní čísla:

$i = \sqrt{-1}$ Algebraický tvar komplexního čísla:
 $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ $a = a_1 + a_2 \cdot i$ $b = b_1 + b_2 \cdot i$
 $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
 $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ $a + b = (a_1 + b_1) + i \cdot (a_2 + b_2)$
 $i^5 = i^4 \cdot i = i$ $a - b = (a_1 - b_1) + i \cdot (a_2 - b_2)$
 $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$ $a \cdot b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)$
 $\frac{a}{b} = \frac{a_1 + a_2 \cdot i}{b_1 + b_2 \cdot i} \cdot \frac{b_1 - b_2 \cdot i}{b_1 - b_2 \cdot i} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + i \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{b_1^2 + b_2^2}$

Čísla komplexně sdružená:
 $a = a_1 + a_2 \cdot i, \quad \bar{a} = a_1 - a_2 \cdot i$

Goniometrický tvar komplexního čísla:
 $a = |a| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$

6. Logaritmy

$$\log_x(a \cdot b) = \log_x a + \log_x b$$

$$\log_a x = y$$

$$\log_x\left(\frac{a}{b}\right) = \log_x a - \log_x b$$

$$x = a^y$$

$$\log_x a^n = n \cdot \log_x a$$

Dekadický logaritmus:

$$\log_{10} x = \log x$$

$$\log_x \sqrt[n]{a} = \log_x a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_x a$$

Přirozený logaritmus:

$$\ln_e x = \ln x$$

Výpočet logaritmu pomocí dekadických logaritmů: $\log_z x = \frac{\log x}{\log z}$

Výpočet logaritmu pomocí přirozených logaritmů: $\ln_z x = \frac{\ln x}{\ln z}$

7. Výroková logika

\wedge	a zároveň	\leq	menší nebo rovno
\vee	nebo	\geq	větší nebo rovno
\cap	průnik	\neq	nerovná se
\cup	sjednocení	\approx	shodný
\in	je prvkem	\exists	existuje
\notin	není prvkem	∞	nekonečno
\Rightarrow	plyne, potom	\perp	kolmost
\forall	každý	\angle	úhel
\subset	je podmnožinou	Σ	suma, součet

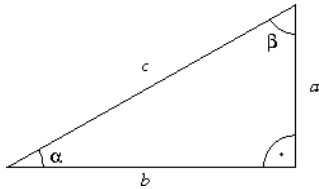
Pravdivostní tabulka

A	A'
1	0
0	1

Výroky		Konjunkce	Disjunkce	Implikace	Úplná disjunkce	Ekvivalence
A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \vee \neg B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1

8. Goniometrie: $\sin \alpha = \frac{\text{protilehla}}{\text{prepona}}$
 $\cos \alpha = \frac{\text{prilehla}}{\text{prepona}}$

$\text{tg} \alpha = \frac{\text{protilehla}}{\text{prilehla}}$
 $\text{cot} g \alpha = \frac{\text{prilehla}}{\text{protilehla}}$



$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\text{tg} \alpha = \frac{a}{b}$
 $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\text{cot} g \alpha = \frac{b}{a}$

	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\text{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	--	0	--	0
$\text{cotg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	--	0	--

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
 $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg} \alpha$
 $\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg} \alpha$

	I. kv.	II. kv.	III. kv.	IV. kv.
	α	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\text{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\text{cotg} \alpha$	+	-	+	-

$\sin^2 x + \cos^2 = 1$

$\text{tg} x = \frac{1}{\text{cot} gx} \longrightarrow \text{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
 $\text{cot} gx = \frac{1}{\text{tg} x} \longrightarrow \text{cot} gx = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
 $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
 $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

Sinová věta: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

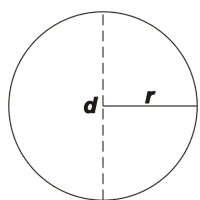
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Kosinová věta: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

9. Obsahy, obvody ploch:

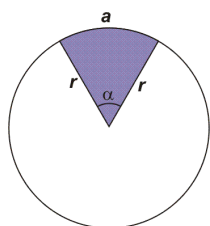
Kružnice, kruh



$$S = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$O = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$$

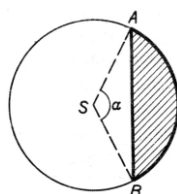
Kruhová výseč



$$S = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}$$

$$O = (\alpha + 2)r$$

Kruhová úseč



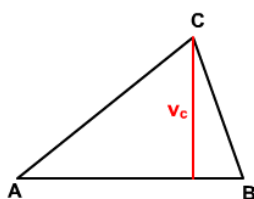
délka kruhového oblouku: $l = \frac{\alpha \pi r}{180^\circ}$

délka tětiny: $t = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$

obvod: $O = t + r$

Trojúhelník

a) obecný

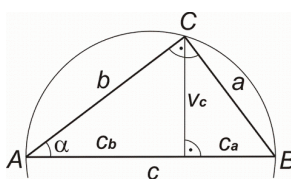


$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$O = a + b + c$$

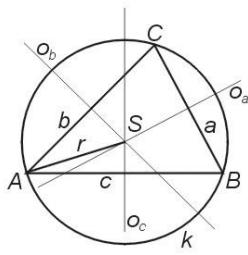
b) pravoúhlý



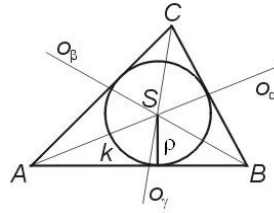
$$S = \frac{1}{2} a \cdot b$$

Heronův vzorec: $S = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

Kružnice opsaná a vepsaná:



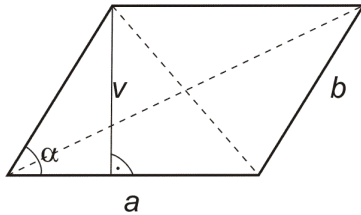
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$$



$$S = \rho \cdot s$$

$$s = \frac{O}{2}$$

Rovnoběžník

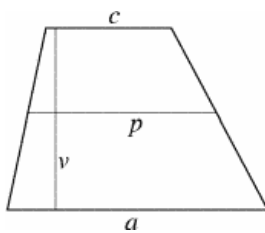


$$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

$$S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$O = 2 \cdot (a + b)$$

Lichoběžník

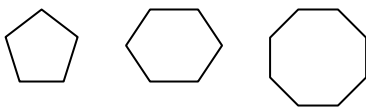


$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

$$O = a + b + c + d$$

střední příčka: $p = \frac{a + c}{2}$

N-úhelník

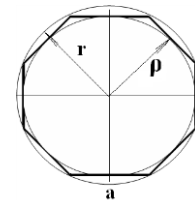


$$O = n \cdot a$$

$$S = \frac{1}{4} \cdot n \cdot a^2 \cot g \frac{180^\circ}{n}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

$$S = n \cdot \rho^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

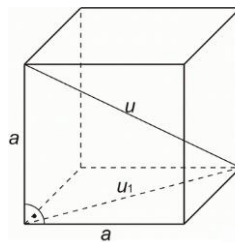


10. Stereometrie

Krychle

$$S = 6 \cdot a^2$$

$$V = a^3$$



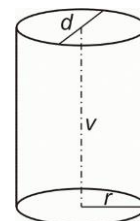
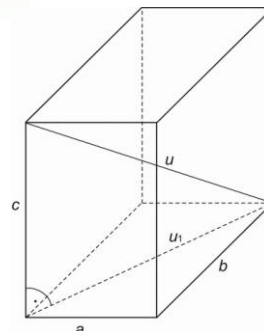
$$S = S_p + S_{pl}$$

$$V = S_p \cdot v$$

Kvádr

$$S = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

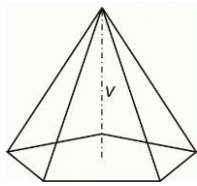


Válec

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot v = 2\pi r(r + v)$$

$$V = \pi r^2 \cdot v$$

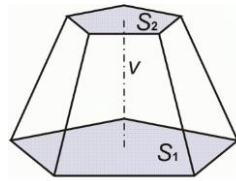
Jehlan



$$S = S_p + S_{pl}$$

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

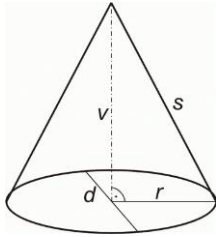
Komolý jehlan



$$S = S_{pl} + S_1 + S_2$$

$$V = \frac{1}{3} v (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

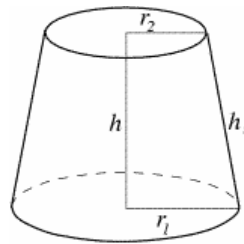
Kužel



$$S = \pi r (r + s)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v$$

Komolý kužel



$$S = \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2 + \pi(r_1 + r_2) \cdot s$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

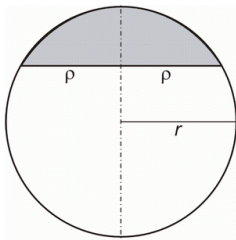
$$h_s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$$

Koule

$$S = 4\pi \cdot r^2 = \pi \cdot d^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{1}{6} \pi \cdot d^3$$

Vrchlík, kulová úseč



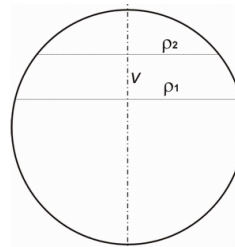
Obsah vrchlíku:

$$S = 2\pi \cdot r \cdot v$$

Objem kulové úseče:

$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} (3\rho^2 + v^2)$$

Kulový pás, kulová vrstva



Obsah kulového pásu:

$$S = 2\pi \cdot r \cdot v$$

Objem kulové vrstvy:

$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} (3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$$

11. Analytická geometrie v rovině

Střed úsečky AB

$$S = \frac{A+B}{2}$$



$$S_x = \frac{A_x + B_x}{2}, S_y = \frac{A_y + B_y}{2}$$

Vektor

$$\vec{u} = (u_1; u_2)$$

Směrový, normálový vekt.

$$\vec{u} = (a; b), \vec{n} = (-b; a)$$

Velikost vektoru

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Úhel dvou vektorů

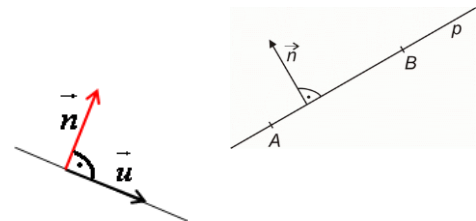
$$\cos \varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|u| \cdot |v|}$$

Skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos 90^\circ = 0$$



Přímka

Parametrická rovnice

$$\begin{aligned} X &= A_x + t \cdot u_1 \\ Y &= A_y + t \cdot u_2 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} A &= [A_x; A_y] \\ \vec{u} &= (u_1; u_2) \\ \vec{u} &= (a; b) \\ A &= [x; y] \end{aligned}$$

Obecná rovnice

$$ax + by + c = 0$$

Směrnice tvar

$$y = kx + q$$

Směrnice přímky

$$k = \operatorname{tg} \pi = \frac{y}{x}$$

Směrnice dána dvěma body:

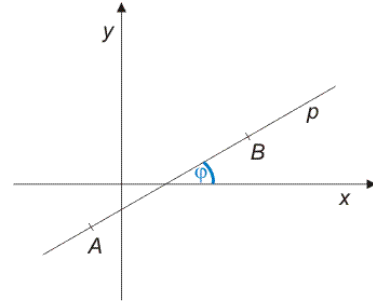
$$k = \frac{A_y - B_y}{A_x - B_x}$$

Úhel dvou přímek

$$\cos \varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|u| \cdot |v|}$$

Vzdálenost bodu od přímky

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



12. Analytická geometrie v prostoru

Vektor

$$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$$

Velikost vektoru

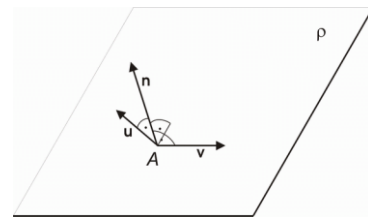
$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Úhel dvou vektorů

$$\cos \varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|u| \cdot |v|}$$

Skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



Přímka

Parametrická rovnice

$$\begin{aligned} X &= A_x + t \cdot u_1 \\ Y &= A_y + t \cdot u_2 \\ Z &= A_z + t \cdot u_3 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} A &= [A_x; A_y; A_z] \\ \vec{u} &= (u_1; u_2; u_3) \\ \vec{u} &= (a; b; c) \\ A &= [x; y; z] \end{aligned}$$

Obecná rovnice

$$ax + by + cz + d = 0$$

Úhel dvou přímek

$$\cos \varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|u| \cdot |v|}$$

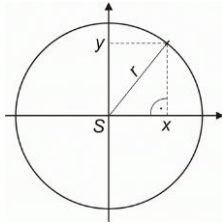
Vzdálenost bodu od přímky

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

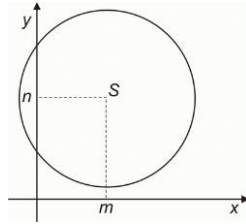
13. Analytická geometrie kuželoseček

Kružnice

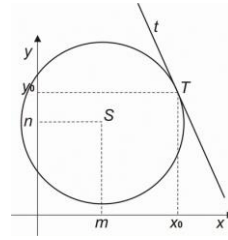
Rovnice tečny ke kružnici:



$$x^2 + y^2 = r^2$$



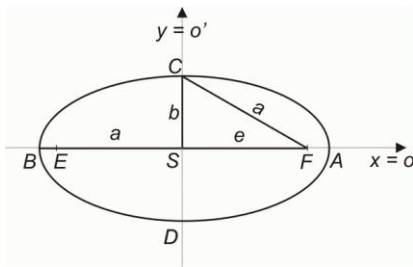
$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$



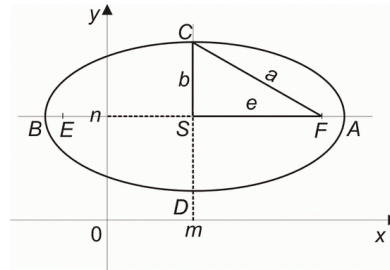
$$(x-m)(x_0-m) + (y-n)(y_0-n) = r^2$$

Elipsa

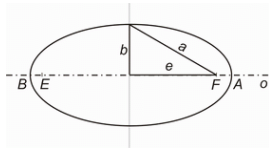
$$S = [0;0]$$



$$S = [m;n]$$



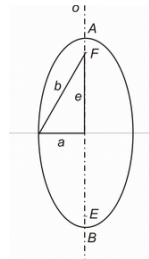
osa elipsy II s osou x:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

osa elipsy II s osou y:



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

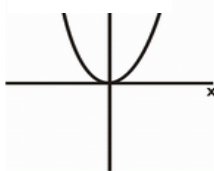
$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

Parabola

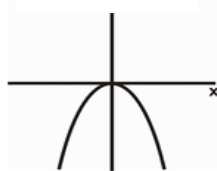
v základní poloze

$$V = [0;0]$$

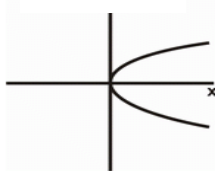
$$x^2 = 2py$$



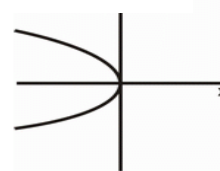
$$x^2 = -2py$$



$$y^2 = 2px$$



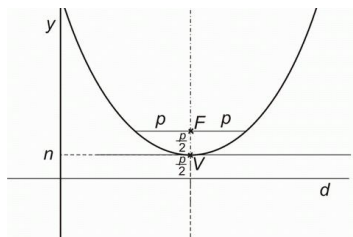
$$y^2 = -2px$$



v posunute poloze

$$V = [m;n]$$

$$|VF| = \frac{p}{2}$$



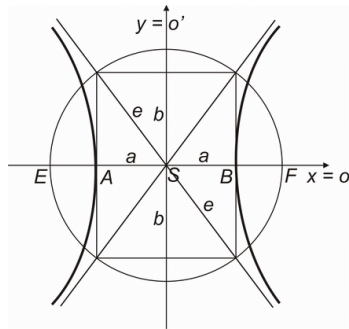
$$(x-m)^2 = 2p(y-n)$$

$$(x-m)^2 = -2p(y-n)$$

$$(y-n)^2 = 2p(x-m)$$

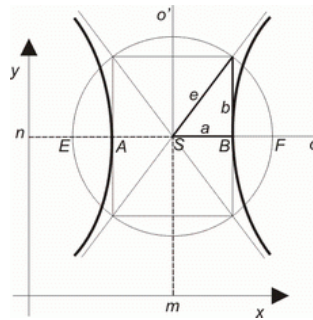
$$(y-n)^2 = -2p(x-m)$$

Hyperbola



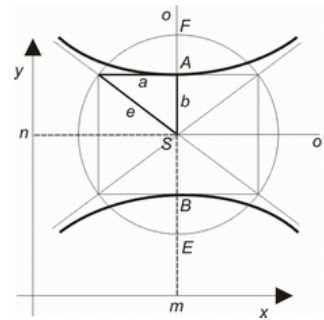
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EF II s osou x



$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

EF II s osou y



$$\frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(x-m)^2}{a^2} = 1$$

Rovnice tečny hyperboly v bodě $T = [x_0; y_0]$

$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} - \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} - \frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} = 1$$

Rovnice tečny hyperboly v posunutě poloze se středem $S = [m; n]$:

$$(x - m)(y - n) = k$$

14. Posloupnosti

Aritmetická

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_r = a_s + (r - s) \cdot d$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Geometrická

$$q = \frac{a_n + 1}{a_n}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Nekonečná geometrická řada:

$$s = \frac{a_1}{1 - q} \quad |q| < 1$$

15. Kombinatorika

variace k-té třídy z n prvků

$$V_k(n) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

variace k-té třídy z n prvků s opakováním

$$V_k'(n) = n^k$$

permutace bez opakování

$$P(n) = n! \quad n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

permutace s opakováním

$$P_r(n) = \frac{n!}{r!} \quad r \text{ prvků se opakuje}$$

kombinace k-té třídy z n prvků

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

vlastnosti kombinačních čísel:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomická věta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

16. Pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

doplňkový jev $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

sjednocení jevů $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

průnik jevů $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

17. Diferenciální počet

Definice derivace

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tabulkové derivace

f	f'
k	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log x$	$\frac{1}{x} \log e$

Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

$$(k \cdot u)' = k \cdot u'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Derivace složené funkce

Pro zjednodušení označujeme vnitřní funkci proměnnou t .

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x$$

Tečna funkce v bodě $T = [x_0; y_0]$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

18. Integrální počet

Tabulkové integrály

$f(x)$	$f(x)'$
k	$x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

pravidla pro integraci

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Per partes

$$\int (u \cdot v) dx = uv - \int u \cdot v' dx$$

Určitý integrál

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Výpočet objemu tělesa

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$