

Kombinatorika – řešení s vysvětlením

Variace, permutace, kombinace, kombinační čísla, faktoriály

Jak poznat, co použít

1. **Záleží na pořadí?** Ano $\Rightarrow$ *variace* (když použiju všechny prvky, jsou to *permutace*). Ne $\Rightarrow$ *kombinace*.
2. **Mohou se prvky opakovat?** Pak jde o variace / permutace *s opakováním*.
3. **Pravidlo součinu a součtu:** dělám-li více kroků *zároveň* (první *a* druhý), **násobím**.
Dělí-li se úloha na případy *bud'* – *nebo*, **sčítám**.

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad P(n) = n!$$

$$V'(n, k) = n^k \text{ (s opakováním)} \quad P' = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots} \text{ (permutace s opakováním)}$$

Úpravy výrazů s faktoriály

Klíčový trik: větší faktoriál rozepíšeme pomocí menšího, např. $(n+4)! = (n+4) \cdot (n+3)!$.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 \cdot \frac{n^2 - 16}{(n+4)!} + \frac{n^2 + 5}{(n+3)!} + \frac{3}{(n+2)!} \\ \frac{n^2 - 16}{(n+4)!} &= \frac{(n-4)(n+4)}{(n+4)(n+3)!} = \frac{n-4}{(n+3)!} \\ \frac{2(n-4) + n^2 + 5}{(n+3)!} &= \frac{n^2 + 2n - 3}{(n+3)!} = \frac{(n+3)(n-1)}{(n+3)(n+2)!} = \frac{n-1}{(n+2)!} \\ \frac{n-1}{(n+2)!} + \frac{3}{(n+2)!} &= \frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{n+2}{(n+2)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Podmínka: $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{n^2 - 9}{(n+3)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ \frac{n^2 - 9}{(n+3)!} &= \frac{(n-3)(n+3)}{(n+3)(n+2)!} = \frac{n-3}{(n+2)!}, \quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+2)!} \\ \frac{n-3 + 6 - (n+2)}{(n+2)!} &= \frac{1}{(n+2)!} \end{aligned}$$

Podmínka: $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{(n+2)!}{n!} - \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \\ \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} - \frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} &= (n+2)(n+1) - (n-1) = n^2 + 3n + 2 - n + 1 = n^2 + 2n + 3 \end{aligned}$$

Podmínka: $n \geq 2$ (aby existovalo $(n-2)!$).

Rovnice s kombinačními čísly a faktoriály

Užitečné vzorce: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

a) $\binom{x+1}{x+1} + \binom{5}{3}\binom{x+1}{x} - \binom{4}{3}\binom{x+1}{x-1} = 1$

$$1 + 10(x+1) - 4 \cdot \frac{(x+1)x}{2} = 1 \Rightarrow 10(x+1) = 2x(x+1) \Rightarrow 2x = 10$$

Podmínka $x \geq 1$, výsledek $x = 5$.

b) $\binom{x+2}{2}\binom{x}{0} - \binom{x-1}{x-3}\binom{x}{x} = \frac{x^2}{2} - \binom{8}{1}\binom{x+1}{x+1}$

$$\frac{(x+2)(x+1)}{2} - \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{x^2}{2} - 8$$

Levá strana: $\frac{(x^2+3x+2)-(x^2-3x+2)}{2} = 3x$. Tedy $x^2 - 6x - 16 = 0$, $(x-8)(x+2) = 0$.

Podmínka $x \geq 3$, výsledek $x = 8$.

c) $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \frac{x^2+1}{2}$

$$\frac{x(x-1)}{2} + x = \frac{x^2+1}{2} \Rightarrow x^2 - x + 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x = 1$$

Podmínka je ale $x \geq 2$, proto **nemá řešení**.

d) $\frac{(n+6)!}{(n+4)!} - n \cdot \frac{(n-4)!}{(n-5)!} = 5n + 80$

$$(n+6)(n+5) - n(n-4) = 5n + 80 \Rightarrow 15n + 30 = 5n + 80 \Rightarrow 10n = 50$$

Podmínka $n \geq 5$, výsledek $n = 5$.

e) $5\binom{x+8}{x+7} - \binom{x}{1} = 2\binom{x}{0}\binom{x+1}{x}\binom{x}{x-1}$

$$5(x+8) - x = 2 \cdot 1 \cdot (x+1) \cdot x \Rightarrow 2x^2 - 2x - 40 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+4) = 0$$

Podmínka $x \geq 1$, výsledek $x = 5$.

f) $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = x^2$

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{(x-1)(2x-2)}{2} = (x-1)^2 = x^2 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

To není přirozené číslo, proto **nemá řešení**.

Kombinatorická pravidla

1. Dřevo a doplňky

84 $\Rightarrow$ d)

Úlohu rozdělíme na dva případy, které nemohou nastat zároveň: dřevo je *bud'* světlé, *nebo* tmavé.

- Světlé dřevo (7 druhů) jde k 4 „světlým“ + 2 univerzálním doplňkům, tj. 6 doplňků. Ke každému dřevu mohu dát každý doplněk: $7 \cdot 6 = 42$.
- Tmavé dřevo (6 druhů) jde k $5 + 2 = 7$ doplňkům: $6 \cdot 7 = 42$.

Případy sčítáme: $42 + 42 = 84$. To není mezi a)–c), proto odpověď **d)**.

2. Cesty z Jedlové do Smrkové přes U malin

30 ⇒ c)

Z obrázku čteme počty cest mezi místy: Jedlová – U malin 3, U malin – Smrková 1 (přímo), U malin – Vyhlička 3, Vyhlička – Smrková 3. Turisté *musí* projít přes U malin. Pak mají dvě možnosti:

- U malin → přímo Smrková: $3 \cdot 1 = 3$.
- U malin → Vyhlička → Smrková: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Úseky jdou za sebou, proto násobíme. Dvě varianty trasy sčítáme: $3 + 27 = 30$. Dlouhý oblouk z Jedlové vede mimo U malin, proto se nepočítá.

Kombinace

1. Přidám 1 prvek, kombinací 3. třídy přibude 6

4

„Kombinace 3. třídy z n prvků“ = počet trojic $C(n, 3)$. Zadání: $C(n + 1, 3) - C(n, 3) = 6$.

Pomůcka: když přidám nový prvek, nové trojice jsou právě ty, které ho obsahují – k němu dobírám 2 ze starých n prvků, tedy přibude $C(n, 2)$.

$$\frac{n(n-1)}{2} = 6 \Rightarrow n(n-1) = 12 \Rightarrow n = 4$$

2. Čtyřčlenných kombinací je 20× víc než dvoučlenných

18

$$C(n, 4) = 20 C(n, 2) \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 20 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$
$$(n-2)(n-3) = 240 = 16 \cdot 15 \Rightarrow n = 18$$

3. Přidám 4 prvky, dvojic přibude 30

6

$$C(n+4, 2) - C(n, 2) = \frac{(n+4)(n+3) - n(n-1)}{2} = \frac{8n+12}{2} = 4n+6 = 30 \Rightarrow n = 6$$

4. 10 výrobků, 3 vadné, vybírám 5

Krabici si rozdělím na dvě hromádky: **7 dobrých** a **3 vadné**. Pořadí výběru nehraje roli – kombinace. Zvlášť vyberu z vadných a zvlášť z dobrých a výsledky vynásobím.

- a) **žádný vadný**: všech 5 z dobrých: $C(7, 5) = \mathbf{21}$
- b) **právě 1 vadný**: 1 ze 3 vadných a 4 ze 7 dobrých: $3 \cdot 35 = \mathbf{105}$
- c) **nejvýše 1 vadný** = 0 nebo 1 vadný, případy sčítám: $21 + 105 = \mathbf{126}$
- d) **právě 2 vadné**: 2 ze 3 vadných a 3 ze 7 dobrých: $3 \cdot 35 = \mathbf{105}$
- e) **nejvýše 2 vadné** = 0, 1 nebo 2: $21 + 105 + 105 = \mathbf{231}$
- f) **alespoň 2 vadné** = 2 nebo 3. Se 3 vadnými беру všechny vadné a 2 dobré: $C(7, 2) = 21$.
Celkem $105 + 21 = \mathbf{126}$

Kontrola: všech výběrů je $C(10, 5) = 252$ a $231 + 21 = 252 \checkmark$

5. Přímký určené 10 body

- a) Přímka je určena **dvojitě bodů** a na pořadí bodů nezáleží: $C(10, 2) = \mathbf{45}$.

- b) Čtyři body leží na jedné přímce. Mezi nimi je $C(4, 2) = 6$ dvojic, ale všechny určují **tutéž** přímku. Těch 6 odečtu a jednu přímku přičtu zpět: $45 - 6 + 1 = \mathbf{40}$.

6. Třída: 10 chlapců, 12 dívek

- a) Dvojice z 22 lidí, pořadí nehraje roli: $C(22, 2) = \mathbf{231}$.
- b) 1 chlapec z 10 a 2 dívky z 12: $10 \cdot C(12, 2) = 10 \cdot 66 = \mathbf{660}$.
- c) Petr je ve skupině jistě, dobírám jen 2 ze zbylých 21: $C(21, 2) = \mathbf{210}$.
- d) Chlapec nesmí být Petr, vybírám ho z 9: $9 \cdot 66 = \mathbf{594}$.

7. Šachovnice 5×5 , tři figury na diagonále

20 $\Rightarrow$ B

Figury jsou stejné, takže nezáleží na pořadí – kombinace. Každá diagonála má 5 polí, vybírám 3: $C(5, 3) = 10$. Hlavní diagonála 10 možností, vedlejší také 10.

Nezapočítám nějakou trojici dvakrát? Ne – diagonály mají společné jen prostřední pole, tři figury se na obě vejít nemohou. Celkem $10 + 10 = 20$.

8. Trojice otázek

1900

Ze skupiny 1 vyberu 1 otázku z 10. Ze skupiny 2 vyberu dvojici – u dvojice nezáleží na pořadí: $C(20, 2) = 190$. Obojí dělám zároveň, proto násobím: $10 \cdot 190 = 1900$.

9. Fotbalový turnaj

2 200 Kč

„Každý s každým“ = zápas je dvojice týmů, pořadí nehraje roli: $C(4, 2) = 6$ zápasů. Čas:

- hrací doba: $6 \cdot 90 = 540$ min,
- přestávka v poločase každého zápasu: $6 \cdot 10 = 60$ min,
- přestávky *mezi* zápasy: mezi 6 zápasy jsou jen 5 mezer: $5 \cdot 10 = 50$ min.

Celkem 650 min = 10 h 50 min. Platí se každá *započatá* hodina, tj. 11 hodin: $11 \cdot 200 = 2200$ Kč.

Variace, permutace

1. Uberu 1 prvek, variací 2. třídy ubude 16

9

Variace 2. třídy jsou *uspořádané* dvojice: $V(n, 2) = n(n - 1)$.

$$n(n - 1) - (n - 1)(n - 2) = (n - 1) \cdot 2 = 16 \Rightarrow n = 9$$

2. Variací 4. třídy je $20 \times$ víc než 2. třídy

7

$$n(n - 1)(n - 2)(n - 3) = 20 \cdot n(n - 1) \Rightarrow (n - 2)(n - 3) = 20 = 5 \cdot 4 \Rightarrow n = 7$$

Zkouška: $V(7, 4) = 840$, $V(7, 2) = 42$, $840 : 42 = 20$ ✓

(U kombinací v příkladu 2 vyšlo 18, protože se navíc dělí $4!$ a $2!$.)

3. Čísla mezi 300 a 5000 z cifer 2, 3, 4, 7, 8

120

Na pořadí cifer záleží ($34 \neq 43$) a cifry se neopakují – variace. Rozdělím podle počtu cifer:

- **Trojčiferná** (> 300): první cifra nesmí být 2. Zbývají 3, 4, 7, 8 = 4 možnosti, na další místo 4 cifry, na poslední 3: $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

- **Čtyřciferná** (< 5000): první cifra musí být menší než 5: 2, 3 nebo 4 = 3 možnosti, pak $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 24 = 72$.
- Pěticiferná jsou všechna větší než 5000, dvojciferná menší než 300 – nepočítáme.

Celkem $48 + 72 = 120$.

4. Pěticiferná čísla z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5

Hlavní past: **nula nesmí být na začátku**, jinak by číslo bylo jen čtyřciferné.

a) **Číslice se neopakují.** Místa vyplňuji zleva a použité číslice škrtnám:

- 1. místo: 5 možností (cokoli kromě 0), 2. místo: 5 (nula už smí, jedna číslice je spotřebovaná), pak 4, 3, 2.
- Všech čísel: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{600}$. (Jinak: $V(6, 5) - V(5, 4) = 720 - 120$.)

Dělitelná 5 – končí 0 nebo 5:

- končí 0: nula je vzadu, první místo nemá omezení, 4 pozice obsazují číslicemi 1–5: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$,
- končí 5: nula je volná, takže na začátku smí jen 1, 2, 3, 4: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$,
- celkem $120 + 96 = \mathbf{216}$.

Sudá – končí 0, 2 nebo 4: $120 + 96 + 96 = \mathbf{312}$.

Proč dělíme podle poslední číslice? Když je nula na konci, „ubere se“ z nabídky a první místo pak nemá zákaz. Když na konci není, první místo musí nulu ještě vynechat.

b) **Číslice se mohou opakovat.** Každé místo má 6 možností, jen první nesmí mít 0:

- všechna: $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^4 = \mathbf{6480}$,
- končící 5: poslední místo je dané, první má 5 možností, prostřední tři po 6: $5 \cdot 6^3 = \mathbf{1080}$.

5. Šestimístné kódy

27 000

Lichých číslic je 5 (1, 3, 5, 7, 9), samohlásek 6 (a, e, i, o, u, y). Znak se smějí opakovat, takže každé místo má pořád stejný počet možností. Tři místa po 5 a tři místa po 6:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 125 \cdot 216 = 27\,000$$

6. Knihy na polici

435 456 000

Pořadí skupin je dané: nejdřív české, pak anglické. Stačí zvlášť seřadit české (10!) a zvlášť anglické (5!). Obojí platí zároveň, proto násobím:

$$10! \cdot 5! = 3\,628\,800 \cdot 120 = 435\,456\,000$$

7. Vagóny rychlíku

3 780

Vagónů je $2 + 1 + 4 + 2 = 9$. Kdyby byly všechny různé, bylo by 9! pořadí. Některé jsou ale **stejně** – když prohodím dva stejné lůžkové vozy, vlak vypadá pořád stejně. Proto dělím počtem prohození stejných vozů (permutace s opakováním):

$$\frac{9!}{2! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{362\,880}{96} = 3780$$

8. Rozvrh

665 280; 332 640; 55 440

Z 12 předmětů vybírám 6 a záleží na pořadí (první hodina není totéž co druhá) – variace:

$$V(12, 6) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 665\,280$$

- **s matematikou:** matematiku dám na jednu ze 6 hodin (6 možností), zbylých 5 hodin obsadím z 11 předmětů: $6 \cdot V(11, 5) = 6 \cdot 55\,440 = 332\,640$,
- **matematika první hodinu:** první hodina je pevná, zbytek $V(11, 5) = 55\,440$.

9. Sedm dětí

- a) do řady – pořadí všech dětí, permutace: $7! = 5040$,
- b) nejvyšší dítě stojí pevně uprostřed, ostatních 6 libovolně: $6! = 720$,
- c) na kraji jsou 2 místa (vlevo/vpravo), zbytek $6! : 2 \cdot 720 = 1440$,
- d) „ne na kraji“ je opak c): $5040 - 1440 = 3600$,
- e) do kruhu: kruh nemá začátek – když se všichni posunou o jedno místo, je to stejné rozestavení. Jedno dítě „ukotvím“ a ostatní řadím kolem něj: $(7 - 1)! = 720$.

10. Přesmyčky slova MATEMATIKA

151 200

Slovo má 10 písmen. Kdyby byla všechna různá, je to $10!$. Některá se ale opakují: A třikrát, M dvakrát, T dvakrát. Prohození dvou A nic nezmění, proto dělím stejně jako u vagónů:

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{3\,628\,800}{24} = 151\,200$$